EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

PROBLEME I

A. Etude d'une fonction f

On fixe un réel α et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1) a) Déterminer α tel que f soit continue en 0.

Désormais, α prendra cette valeur.

b) Montrer qu'alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier la parité, les variations et les limites en $\pm\infty$ de f.

(On pourra être amené à étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x$)

Donner l'allure de la courbe représentative de f.

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

En déduire un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \text{ avec } (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4.$$

B. Développement en série entière de f

1) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, en précisant le rayon de convergence associé.

2) En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
Préciser ce développement.

3) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et préciser $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C. Résolution d'une équation différentielle

On considère les deux équations différentielles

$$(E)\ x^2y''+4xy'+2y=\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

et $(E_H)\ x^2y''+4xy'+2y=0$.

Dans cette partie, I désigne l'un des deux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que (E_H) admet sur I deux solutions de la forme $x\mapsto x^k$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
En déduire toutes les solutions de (E_H) sur I.

2) Résoudre alors (E) sur I par la méthode de variation des constantes.
(On pourra remarquer que $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{Arctan}x+\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}$.)

3) En déduire que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et que cette solution est f.

D. Calcul de deux intégrales impropres

On considère les deux intégrales impropres

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}x}{x^2}dx$$

et $K=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{Arctan}x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

1) Justifier l'existence de ces deux intégrales.

2) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2}$.

b) Calculer alors J à l'aide d'une intégration par parties (prudente).

3) En effectuant un changement de variable et en utilisant la relation prouvée en **A.3)**, calculer l'intégrale K.

Tournez la page S.V.P.

E. Etude d'une autre fonction

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1) Montrer que g est développable en série entière sur $]-1,1[$ sous la forme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)^2}.$$

2) En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

b) Justifier (soigneusement) que sa somme est égale à $g(1)$.

c) En déduire un rationnel approchant $g(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,dt$ à 5×10^{-2} près.

4) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) - \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}.$$

(On pourra écrire l'expression $g(x) - \dfrac{1}{x^2} g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sous la forme $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} h(t)\,dt$, où h est une fonction à déterminer, puis utiliser un changement de variable et la relation prouvée en **A.3**).)

5) En déduire un équivalent simple de g au voisinage de $+\infty$, ainsi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

6) Etudier la parité et les variations de g, puis donner l'allure de sa courbe représentative.

(On pourra être amené à étudier la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x - \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,dt$, et à utiliser l'étude de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x$, déjà effectuée en **A.2**).)

PROBLEME II

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ -a & a & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices de la forme $M(a,b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est noté E.

Dans les parties **A** et **B**, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel.

A. Généralités

1) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
En donner une base et la dimension.

2) Pourquoi peut-on assurer sans calculs que $M(a,b)$ est diagonalisable ?
Que peut-on dire de plus ?

3) Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a,b)$, puis, pour chacune des valeurs propres obtenues (non nécessairement distinctes), déterminer un vecteur propre associé, que l'on choisira unitaire, et de première composante positive.

4) En déduire que $M(a,b) = PD'P$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & b\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -b\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

B. Matrices orthogonales de E

1) Déterminer, parmi les matrices $M(a,b)$ de E, celles qui sont orthogonales.

2) On note $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier que l'endomorphisme ψ de $\mathbb{R}^3$, admettant A pour matrice dans la base canonique, est une isométrie vectorielle.
En préciser la nature et les éléments caractéristiques.

Tournez la page S.V.P.

C. Construction de nouveaux produits scalaires sur $\mathbb{R}^3$

Etant donnés trois réels λ, a et b, on pose $N = \lambda I_3 + M(a,b)$.

Pour tous vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on pose alors $\phi(U,V) = {}^tUNV$.

On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur λ, a et b, pour que ϕ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Selon l'usage, on convient d'identifier une matrice carrée d'ordre 1 et son unique coefficient.

1) Sans déterminer explicitement $\phi(U,V)$, montrer que ϕ est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, bilinéaire et symétrique.

2) On pose $Z = {}^tPU$ (P a été définie dans la partie **A**), et on note z_1, z_2 et z_3 les composantes de Z, de sorte que $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\phi(U,U) = {}^tZ(\lambda I_3 + D)Z = (\lambda + 2a)z_1^2 + \left(\lambda + b\sqrt{2}\right)z_2^2 + \left(\lambda - b\sqrt{2}\right)z_3^2$.

3) En déduire que si $\lambda > \max\left(-2a, |b|\sqrt{2}\right)$, alors ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

4) Etudier la réciproque.

D. Etude des points critiques d'une fonction de deux variables

Dans cette question, $a = -1$, $b = 1$ et $\lambda = 2$, de sorte que $N = 2I_3 + M(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout couple de réels x et y, on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix}$, puis $f(x,y) = \phi(U,U) = {}^tUNU$.

1) Calculer explicitement $f(x,y)$, puis vérifier que f est de classe C^1 et admet exactement deux points critiques, que l'on précisera. (On pourra remarquer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(1+y)(x+xy+y)$.)

2) A l'aide du résultat de **C.2)**, montrer que l'un de ces points critiques – à préciser – correspond à un minimum global de f.

3) Vérifier que $f(-2+t,-1+t) - f(-2,-1) \underset{0}{\sim} -2t^3$. Qu'en déduit-on pour l'autre point critique ?

Fin de l'énoncé